$$z_2 = \frac{\cos\theta + \sin\theta + i\cos\theta - i\sin\theta}{1-i} = \frac{(\cos\theta+\sin\theta+i\cos\theta-i\sin\theta)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2\sin\theta+2i\cos\theta}{2} = \sin\theta+i\cos\theta$$

$$z_1 = \frac{\cos\theta+\sin\theta-i\cos\theta+i\sin\theta}{1-i} = \frac{(\cos\theta+\sin\theta-i\cos\theta+i\sin\theta)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2\cos\theta+2i\sin\theta}{2} = \cos\theta+i\sin\theta$$

On a $\theta \in]0,\pi[$ donc $\text{Im } z_1 > 0$

Donc $\boxed{z_1 = \cos\theta + i\sin\theta \text{ et } z_2 = \sin\theta + i\cos\theta}$

b) $z_1 = \cos\theta + i\sin\theta \Longrightarrow z_1 = e^{i\theta}$

$z_2 = \sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta - i\sin\theta) = ie^{-i\theta}$

$= e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{-i\theta} \Longrightarrow z_2 = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$

c) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \sin\theta = \cos\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ car $\theta \in]0,\pi[$

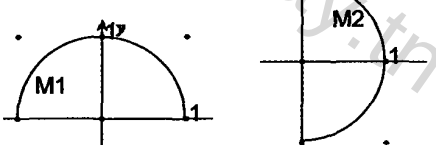
3) $\theta \in [0,\pi]$: et $\text{aff}(M_1) = e^{i\theta}$

Donc M_1 décrit le demi – cercle trigonométrique situé dans le demi plan $y \geq 0$

$\text{aff}(M_2) = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$

$\theta \in [0,\pi] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Donc M_2 décrit le demi – cercle trigonométrique situé dans le demi plan $x \geq 0$



Exercice n° 10

$\theta \in]0,\pi[$

a) $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 \underset{f.Moivre}{=} \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

- Résolution de l'équation

(E) : $z^2 - 2z + 2\sin^2\theta - 2i\sin\theta.\cos\theta = 0$

$\Delta' = 1 - (2\sin^2\theta - 2i\sin\theta.\cos\theta)$

$= 1 - 2\sin^2\theta + 2i\sin\theta.\cos\theta$

$= \underbrace{\cos 2\theta}_{\cos 2a = 1-2\sin^2 a} + \overbrace{i\sin 2\theta}^{\sin 2a = 2\sin a\cos a}$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^2$

Donc une racine carre de Δ' (discriminant réduit) est $\delta' = \cos\theta + i\sin\theta$ d'où on aura :

$z' = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$, $\text{Im } z' = \sin\theta \geq 0$

$z'' = 1 - \cos\theta - i\sin\theta$

b) $z' = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 1 + e^{i\theta} = e^{i0} + e^{i\theta}$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

$z'' = 1 - \cos\theta - i\sin\theta = 1 - e^{i\theta}$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

2) a) $\frac{z''}{z'} = \frac{-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}$, $\frac{\theta}{2} \in]0,\frac{\pi}{2}[$

$= -i\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = -itg\frac{\theta}{2}$

Donc $\frac{aff(\overrightarrow{OM''})}{aff(\overrightarrow{OM'})}$ imaginaire pur ce qui prouve que le triangle OM'M" est rectangle en O

b) OM'M" est isocèle si et seulement si : OM' = OM"

$\Leftrightarrow |z'| = |z''| \Leftrightarrow \left|\frac{z''}{z'}\right| = \left|-itg\frac{\theta}{2}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \left|tg\frac{\theta}{2}\right| = 1$ et $tg\frac{\theta}{2} > 0$ car $\frac{\theta}{2} \in]0,\frac{\pi}{2}[$

D'où $tg\frac{\theta}{2} = 1$ ce qui donne $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$ donc $\theta = \frac{\pi}{2}$

Conclusion : OM'M" est isocèle si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$

3) $z' = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 1 + e^{i\theta} \Leftrightarrow z' - 1 = e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow |z'-1| = |e^{i\theta}| = 1$ donc IM' = 1 où I est le point d'affixe 1 ce qui prouve que le point M' vari sur le cercle C de centre I et de rayon 1

Exercice n° 11

$(E) : z^3 - 2(3+2i)z^2 + 2(4+7i)z - 12i = 0$

a) Soit x un réel ,

x solution de (E) signifie

$x^3 - (6x^2 + 4ix^2) + (8+14i)x - 12i = 0 \Leftrightarrow$

$x^3 - 6x^2 + 8x + i(-4x^2 + 14x - 12) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 8x = 0 (1) \\ -4x^2 + 14x - 12 = 0 (2) \end{cases}$

On a va résoudre dans IR l'équation (2)

$-4x^2 + 14x - 12 = 0$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn